Matematika Mérnököknek 2.

Baran Ágnes, Burai Pál, Noszály Csaba

Gyakorlat
Hatványsorok, Fourier sorok

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Hatványsorok

1. feladat

Írja fel a következő függvények Maclaurin sorának első néhány tagját!

- $f(x) = \sqrt{1-x}$,
- $f(x) = \log((1+x)^5)$,
- $f(x) = \tan(x)$,
- $f(x) = \cosh(x)$.

2. feladat

Ábrázolja Matlab-bal az előző feladatban adott függvényeket, illetve a Maclaurin soruk első néhány tagjával felírt közelítésüket.

3. feladat

Számítsa ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát!

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n^2+1} x^n$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n3^n} x^n$
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} x^n$
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n$
6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} (x-3)^n$
7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+4)^n}{(n^3+2)3^n}$,
8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!(5x+3)^n}{(n+1)^n+4n}$,
9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n(x+3)^n}{4^n}$,
10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(4x-8)^n}{n}$.

Hatványsorok

4. feladat

Írja fel a következő függvények x_0 körüli Taylor sorát!

- $f(x) = \sin(x),\ x_0 = \pi,$
- $f(x) = \cos(x),\ x_0 = \pi,$
- $f(x) = \exp(x),\ x_0 = \log(2),$
- $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1,$
- $f(x) = \log(x),\ x_0 = 1.$

5. feladat

Számítsa ki a $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$, illetve a $\sqrt{42} = \sqrt{36+6}$ közelítő értékét!

6. feladat

Számítsa ki a $\log(2)$ közelítő értékét!

Hatványsorok

Példa

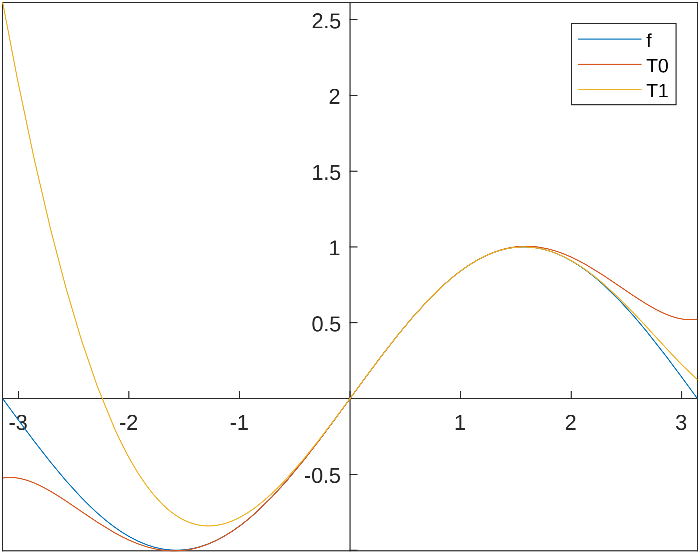
A `taylor` parancs segítségével számítsuk ki a sin függvény $x_0 = 0$ és $x_0 = 1$ körüli Taylor sorának első hat tagját!

```
>> syms x
>> T0 = taylor(sin(x),x,0,'Order',6)
>> T1 = taylor(sin(x),x,1,'Order',6)
```

Ábrázoljuk a függvényt és az előbbi részletösszegeket közös ábrán!

```
>> f = sin(x);
>> fplot([f,T0,T1],[-pi,pi])
>> legend('f','T0','T1');
>> ax = gca;
>> ax.XAxisLocation = 'origin';
>> ax.YAxisLocation = 'origin';
```

Hatványsorok



Fourier-sorok

1. feladat

Döntse el az alábbi függvényekről, hogy periodikusak-e, és ha igen, akkor adja meg a periódusukat.

(a) $\tan(x)$
(b) $\sin(2x)$
(c) $\ln(x)$
(d) $\{x\}$ (törtrész fv)
(e) $\sin(x)\cos(x)$
(f) $x^2 - 1$
(g) $\sin(x) + \cos(x)$

2. feladat

Válassza ki az alábbi függvények közül a párosakat, illetve a páratlanokat!

(a) $\tan(x)$
(b) $x^2 + 1$
(c) $(x+1)^2$
(d) $-2x^5$
(e) $x^5 + 1$
(f) $|x|$
(g) e^{-x^2}
(h) $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Fourier-sorok

Példa

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az $f_0 : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = x^2$ függvény 2π szerint periodikus kiterjesztése. Határozzuk meg az f Fourier-sorát!

Megoldás: mivel f páros függvény, ezért $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_{f}\underbrace{\cos(kx)}_{g'}dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{k}\underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin(kx)}_{v'}dx$$

$$= \frac{2}{k^2\pi}\left[x\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)dx$$

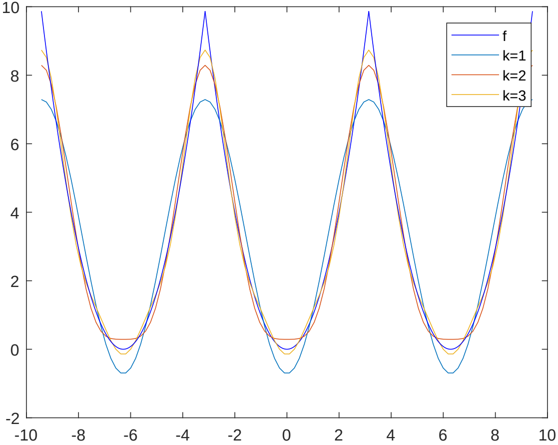
$$= \frac{4}{k^2}\cos(k\pi) - \frac{2}{k^3\pi}[\sin(kx)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{k^2}(-1)^k$$

Így

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos(kx)$$

Feladat

Ábrázolja közös ábrán az előző feladat f függvényét és a Fourier-sor részletösszegeit $k = 1, 2, 3$ esetén a $[-3\pi, 3\pi]$ intervallum felett.



Példa

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az $f_0 : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = x^3$ függvény 2π szerint periodikus kiterjesztése. Határozzuk meg az f Fourier-sorát!

Megoldás: mivel f páratlan függvény, ezért $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^3}_{f}\underbrace{\sin(kx)}_{g'}dx$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{k\pi}[x^3\cos(kx)]_{-\pi}^{\pi}}_{(-1)^{k+1}\frac{2\pi^2}{k}} + \frac{3}{k}\cdot\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(kx)dx}_{A}$$

ahol $A = \frac{4}{k^2}(-1)^k$, az előző feladatból, így

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)$$

Feladat

Ábrázolja közös ábrán az előző feladat f függvényét és a Fourier-sor 12. részletösszegét a $[-3\pi, 3\pi]$ intervallum felett.